Aufgabe 10.1 Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Widerlegen Sie die falsche Aussagen, indem Sie jeweils ein Gegenbeispiel angeben.

a) Binomialkoeffizienten $\binom{10}{k}$ sind für alle durch 5 teilbar.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist x^2 positiv.

c) $\ln|x| > 0$ für alle $x \neq 0$.

d) Alle Zahlen der Form $2^n - 1$ für $n \in \mathbb{N}$ sind prim.

e#) Alle Folgenglieder der durch die Rekursion

$$p_{n+3} = p_{n+2} + p_{n+1} - p_n, \quad p_1 = 5,\ p_2 = 7,\ p_3 = 11$$

definierten Folge sind Primzahlen.

Aufgabe 10.2 Sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit Induktion:

a) $n^3 + 2n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar.

b) $\displaystyle\sum_{m=2}^{n} \frac{1}{(m-1)m} = 1 - \frac{1}{n}$.

c) $n^2 \geq 2n + 2$ für alle $n \geq 3$.

d) $n^2 - 1$ ist für alle ungerade $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, durch 8 teilbar.

e#) $2^n \geq n^2 - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 10.3 Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels Induktion.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

d) $4n^3 - n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar,

e) $n^3 - n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar,

f) $5^n + 7$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 4 teilbar,

g) Die Zahl $3^{2n+1} + 2^{n-1}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 7 teilbar.

Aufgabe 10.4 Betrachten Sie die Summen

$$1, \quad 1+3, \quad 1+3+5, \quad 1+3+5+7, \quad \ldots$$

Wie kann man diese Summen (zeichnerich) veranschaulichen? Welchen Wert kann man für die n-te Summe vermuten? Beweisen Sie Ihre Vermutung mit Induktion.

Aufgabe# 10.5 Eine Pizza wird durch n Geraden in Stücke geschnitten. Die Schnitte können beliebig verlaufen. Wie viele Pizzastücke können höchstens entstehen? Stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen Sie diese mit Induktion.

Aufgabe 10.6

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 weißen und 4 schwarzen Kugel in eine Reihe so zu legen, dass 2 schwarze Kugel nie nebeneinander liegen? Unterscheiden Sie die Fälle: (i) die Kugel einer Farbe sind ununterscheidbar, (ii) alle Kugel sind unterscheidbar.

b) Keine drei Diagonalen eines convexen 10-Ecks schneiden sich in einem Punkt. Wie viele Schnittpunkte der Diagonalen gibt es?

c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 8 Türme auf einem Schachbrett so zu platzieren, dass sich nicht schlagen und nur auf den schwarzen Feldern stehen?

d) Wie viele verschiedene "Wörter" (bzw. Kombinationen) kann man aus folgenden Buchstaben kostruieren:
(i) ABERZ; (ii) EEGHN; (iii) BEEENTT; (iv) ABRAKADABRA?

e) Das Eishockey-Team besteht aus 2 Torwarten, 7 Verteidigern und 10 Angreifern. Wie viele Möglichkeiten hat der Trainer, die Anfangssechs (bestehend aus 1 Torwart, 2 Verteidigern und 3 Angreifern) zu stellen?

f) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 28 Spielkarten unter 7 Spieler zu verteilen?

g) Wie viele 6-stellige Zahlen gibt es, die nur aus ungeraden Ziffern $(1, 3, 5, 7, 9)$ bestehen?

h) Wie viele Teiler hat die Zahl 462?

i) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 9 Bücher in 5 Pakete zu verteilen, falls 4 der Pakete genau 2 Bücher enthalten sollen.